Université Nangui Abrogoua — **République de Côte d'Ivoire**

Licence 2 : MI- PC — **Année Universitaire : 2020/2021**

Examen d'Analyse 3 (Session 2)

ECUE : Développement en série

Durée : 1 heure 15

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les deux exercices sont indépendants.
Une attention particulière devra être apportée à la rédaction qui sera un élément important d'appréciation.

EXERCICE 1:

On considère la série entière réelle définie par la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus. Puis étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.

2. Soit la série entière définie par la fonction $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

   a. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière g.

   b. Calculer pour tout $x \in]-R', R'[$, l'expression de $g(x)$.

3. a. Soit $x \in]-R, R[$. Montrer que $f'(x) = -g(x^2)$.

   b. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

1. Posons pour tout entier naturel non nul et pour tout $x \neq 0$, $a_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} x^2.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} x^2 = x^2,$ d'après la règle de D'Alembert la série converge pour $x^2 < 1$ (c'est-à-dire pour $|x| < 1$) et diverge pour $|x| > 1$. Le rayon de converge de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$ est $R = 1$.

Pour $x = -1$ ou $x = 1$, on a $|a_n(x)| = \frac{1}{n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, on conclut que la série converge pour $x = \pm 1$.

2. a. En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est $R' = 1$.

b Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$. Par intégration, on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \mathrm{d}t \\
[\ln(1+t)]_0^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \\
\ln(1+x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}.
\end{aligned}$$

Donc $g(x) = -\ln(1+x)$.

3 Soit $x \in]-1,1[$.

a Calculons $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \\
f'(x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2)^n \\
f'(x) &= -g(x^2)
\end{aligned}$$

b Calculons $f(x)$:
On a $f'(x) = \ln(1+x^2)$ et comme $f(0) = 0$, donc $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
f(x) &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
f(x) &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \mathrm{d}t + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
f(x) &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).
\end{aligned}$$

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Que peut-on dire sur la parité et la continuité de f.

2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montrera, en particulier, que

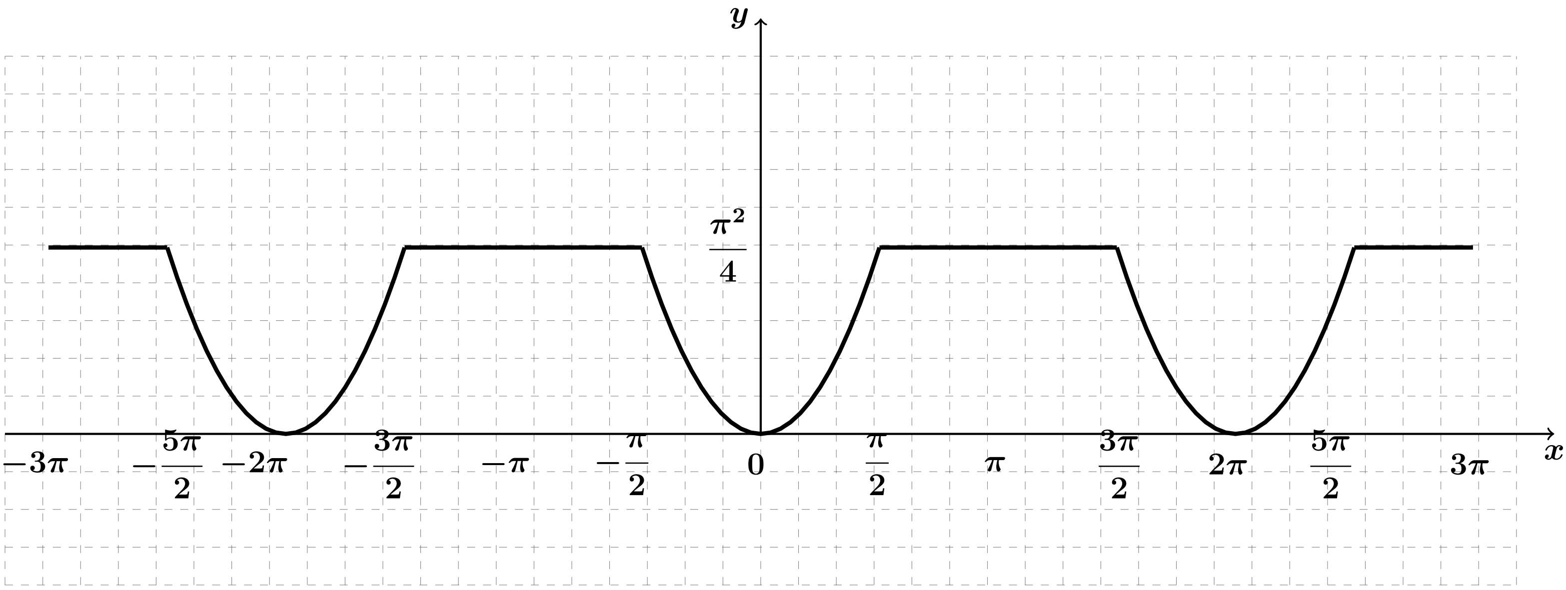
$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad ; \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k^2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^3}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Justifier que la série de Fourier SF_f de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = SF_f(x).$$

4. En considérant deux valeurs particulières de x, en déduire deux équations liant les sommes des séries : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
Résoudre le système linéaire ainsi trouvé pour obtenir les valeurs de S_1 et S_2.

1. Graphe de la fonction f :



Propriétés de la fonction f : D'après le graphe, on constate et on peut démontrer que la fonction f est paire et continue sur $\mathbb{R}$ mais de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul des coefficients de Fourier de f :
La fonction f étant paire, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

- Calcul dans un premier temps a_0 :

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi^2}{4}\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) \\
a_0 =& \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

- Calcul maintenant a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\pi^2}{4}\cos(nx)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x &= \left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{2}{n}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{4n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{\pi}{n^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{2}{n^3}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x &= \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \\
&= -\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$a_n = \frac{2}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{2}{4k^2}\cos(k\pi) - \frac{4}{\pi 8k^3}\sin(k\pi) \\
&= \frac{1}{2k^2}\cos(k\pi) - \frac{1}{2\pi k^3}\sin(k\pi) \\
a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2k^2}
\end{aligned}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{2}{(2k+1)^2}\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi(2k+1)^3}\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{2}{(2k+1)^2}\sin(k\pi) - \frac{4}{\pi(2k+1)^3}\cos(k\pi) \\
a_{2k+1} &= \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3},
\end{aligned}$$

car $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$ et $\sin(k\pi) = 0$.

③ Convergence de la série de Fourier de f :
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF_f(x) = f(x)$, plus précisement :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(2kx) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3}\cos((2k+1)x) \qquad (\star)$$

④ Calcul de $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
En prenant $x = 0$ dans $(\star)$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} = 0$$

En prenant $x = \pi$ dans $(\star)$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Par conséquent S_1 et S_2 vérifient le système : $\begin{cases} -\frac{1}{2}S_1 - \frac{4}{\pi}S_2 &= -\frac{\pi^2}{6} \quad (1) \\ -\frac{1}{2}S_1 + \frac{4}{\pi}S_2 &= \frac{\pi^2}{12} \quad (2) \end{cases}$

$(1) + (2)$ donne $-S_1 = -\frac{\pi^2}{12}$, donc $S_1 = \frac{\pi^2}{12}$, et $(2) - (1)$ donne $\frac{8}{\pi}S_2 = \frac{\pi^2}{4}$, donc $S_2 = \frac{\pi^3}{32}$.